

高等数学(工本)试题

课程代码:00023

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知向量 $\mathbf{a} = \{-1, 3, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-3, 0, 1\}$, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$

- A. $\{3, 5, 9\}$ B. $\{-3, 5, 9\}$ C. $\{3, -5, 9\}$ D. $\{-3, -5, -9\}$

2. 已知函数 $z = e^{xy}$, 则全微分 $dz =$

- A. $e^{xy} dx$ B. $(x + y)e^{xy}$ C. $x dy + y dx$ D. $e^{xy}(y dx + x dy)$

3. 设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D y d\sigma =$

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta dr$ B. $2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta dr$

- C. $2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r \sin\theta dr$ D. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r \sin\theta dr$

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x^2 y}{y^2 + xy^2}$ 是

- A. 可分离变量的微分方程 B. 齐次微分方程
C. 一阶线性齐次微分方程 D. 一阶线性非齐次微分方程

5. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的敛散性为

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 敛散性无法确定

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

6. 已知点 $P(-4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ 和点 $Q(-1, \sqrt{3}, 2)$, 则向量 \overrightarrow{PQ} 的模 $|\overrightarrow{PQ}| =$ _____.

7. 已知函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 则 $f(\frac{y}{x}, 1) =$ _____.

8. 设积分区域 $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq a$, 且二重积分 $\iint_D d\sigma = 8$, 则常数 $a =$ _____.

9. 微分方程 $y'' + 2y = e^x$ 的特解 $y^* =$ _____.

10. 已知无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$, 则 $u_7 =$ _____.

三、计算题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

11. 求过点 $A(2, 10, 4)$, 并且与直线 $x = -1 + 2t, y = 1 - 3t, z = 4 - t$ 平行的直线方程.

12. 求曲线 $x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 3t$ 在对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 的点处的法平面方程.

13. 已知方程 $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 5$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

14. 求函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 的梯度 $\text{grad} f(x, y)$.

15. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的区域.

16. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C (x^2 y - 4) ds$, 其中 C 是从点 $A(3, 0)$ 到点 $B(3, 1)$ 的直线段.

18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (x^3 - 2xy) dx$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(-1, 1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

19. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$ 的通解.

20. 求微分方程 $y'' - y' - 6y = 0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性.

22. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x + 1$, 求 $f(x)$ 傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中系数 b_4 .

四、综合题(本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

23. 求函数 $f(x, y) = xy + \frac{20}{x} + \frac{50}{y}$ ($x > 0, y > 0$) 的极值.

24. 证明对坐标的曲线积分 $\int_C (2xy + 20) dx + (x^2 + 14) dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关.

25. 将函数 $f(x) = \frac{1}{3-4x}$ 展开为 x 的幂级数.