

全国 2015 年 10 月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} -2a_1 + a_2 & a_2 \\ -2b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = -2$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. 设 $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则下列结论中正确的是

- A. 若 $s \leq t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关
 B. 若 $s \leq t$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 必线性相关
 C. 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 则 $s \leq t$
 D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$

4. 设有非齐次线性方程组 $Ax = b$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r_1$, $r(A, b) = r_2$, 则

下列结论中正确的是

A. 若 $r_1 = m$, 则 $Ax = 0$ 有非零解

B. 若 $r_1 = n$, 则 $Ax = 0$ 仅有零解

C. 若 $r_2 = m$, 则 $Ax = b$ 有无穷多解

D. 若 $r_2 = n$, 则 $Ax = b$ 有惟一解

5. 设 n 阶矩阵 A 满足 $|3E - 2A| = 0$, 则 A 必有一个特征值 $\lambda =$

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

6. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij} (i, j = 1, 2)$, 则 $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} =$ _____.

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 + 2A + E =$ _____.

8. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 A 满足 $AP = B$, 则 $A =$ _____.

9. 设向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (2, 1, 3)^T$, 则 β 由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的表示式为 $\beta =$ _____.

10. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 2, k)^T$ 线性相关, 则 k 的取值应满足 _____.

11. 设向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (-2, 0, -4)^T$, 则 $\alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 =$ _____.

12. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵 (A, b) 经初等行变换可化为

$$(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & \vdots & k-1 \end{pmatrix}$$

若该方程组有无穷多解, 则数 $k =$ _____.

13. 设 $\lambda_0 = -2$ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $A - 3E$ 必有一个特征值是 _____.

14. 设 2 阶矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ 的正惯性指数为 _____.

三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分)

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 A, B 满足关系式 $B = E - A$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算

(1) $E + A + A^2$ 与 A^3 ;

(2) $B(E + A + A^2)$.

18. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 X 满足等式 $AX = B + X$, 求 X .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (0, 2, 1, 1)^T$, $\alpha_4 = (-1, 5, -1, 2)^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 设 3 元线性方程组 $\begin{cases} x_1 & + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 & - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + (a+2)x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 & + 3x_3 = b \end{cases}$, 问数 a, b 分别为何值时, 方程组有无穷

多解? 并求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 试判定 A 是否可对角化, 若可以, 求可逆矩阵 P 和对角矩

阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

22. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2x_3$ 为标准形, 并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题(本题 7 分)

23. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 且 α_3 可由 α_1, α_2 线性表出, 证明 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组.