

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的常数项是

- A. -14 B. -7 C. 7 D. 14

2. 将 3 阶矩阵 A 的第 3 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 得到单位矩阵 E , 则 $|A| =$

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若矩阵 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3)$, 则 $|B| =$

- A. 0 B. a C. $2a$ D. $3a$

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中

- A. 必有一个零向量
- B. 必有两个向量对应元素成比例
- C. 存在一个向量可由其余向量线性表出
- D. 每个向量均可由其余向量线性表出

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$, 则下列矩阵中可逆的是

- A. $2E - 3A$ B. $3E - 2A$ C. $3E + 2A$ D. $2E + 3A$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} - 3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} - 3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} - 3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性无关, 则数 a 的取值应满足 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设 3 阶矩阵 A 的所有元素均为 1, 则 3 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中解向量的个数为_____.
13. 设 A 为 3 阶矩阵, α_i 为 3 维非零列向量, 且满足 $A\alpha_i = i\alpha_i$ ($i=1,2,3$), 则 $r(A) =$ _____.
14. 设 $\lambda_0 = -2$ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 则 $A^2 + E$ 的一个特征值是_____.
15. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为_____.

三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分)

16. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 & 0 \\ 0 & d_1 & b_1 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$.

17. 设矩阵 A, B, C 满足关系式 $AC = CB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

求矩阵 A 与 A^3 .

18. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列互换得到矩阵 B , 再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到单位矩阵 E , 求矩阵 A .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 3, 6)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 3, 6)^T$ 的一个极大线性无关组, 并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$ 的通解 (要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -9 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

22. 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2$ 为标准形, 并写出所用的正交变换.

四、证明题 (本题 7 分)

23. 设 A 为 n 阶 ($n \geq 2$) 可逆矩阵, 证明 $(A^T)^* = (A^*)^T$.