

2024 年 4 月高等教育自学考试

高等数学(四) 试题

课程代码:06604

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

选择题部分

注意事项:

每小題选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 15 小題,每小題 2 分,共 30 分。在每小題列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 下列函数在定义域内是偶函数的是

A. $f(x) = \sin x$

B. $f(x) = \cos x$

C. $f(x) = 2x^3$

D. $f(x) = 2x^3 + x^2$

2. 下列函数极限为 0 的是

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

3. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n} =$

A. 0

B. ∞ C. e^2

D. e

4. 若函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0, f'(0) \neq 0$, 则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

A. 连续点

B. 第二类间断点

C. 第一类间断点

D. 不确定

5. 设 $f(x)$ 是可导函数, Δx 是自变量在点 x 处的增量, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} =$

- A. $f'(x)$ B. $2f'(x)$ C. $-2f'(x)$ D. 0

6. 设 $f(x) = x^2(1 - x)$, 则

- A. $x = 0$ 是极小值点, $x = \frac{2}{3}$ 是极大值点 B. $x = 0, x = \frac{2}{3}$ 都是极小值点
C. $x = 0, x = \frac{2}{3}$ 都是极大值点 D. $x = 0$ 是极大值点, $x = \frac{2}{3}$ 是极小值点

7. 设 $f(x) = e^x - \cos x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

- A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 B. $f(x)$ 与 x 是同阶非等价无穷小
C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

8. 曲线 $f(x) = \frac{x+1}{x^2} - 1$ 渐近线条数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

9. 不定积分 $\int x e^x dx =$

- A. $(x - 1)e^x + C$ B. $e^x + C$
C. $x e^x + C$ D. $(x + 1)e^x + C$

10. 若函数 $z = e^{x^2 - y^2}$, 则 $dz =$

- A. $e^{x^2 - y^2} (dx + dy)$ B. $e^{x^2 - y^2} (dx - dy)$
C. $2e^{x^2 - y^2} (x dx - y dy)$ D. $2e^{x^2 - y^2} (x dx + y dy)$

11. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, 则同时与向量 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直的向量为

- A. $(1, -1, 1)$ B. $(-3, 2, -1)$
C. $(1, 1, 2)$ D. $(-3, -2, 1)$

12. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} =$

- A. 0 B. 不存在
C. $\frac{1}{2}$ D. 存在但不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

13. 已知 $\alpha > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi \alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛
C. 发散 D. 敛散性与 α 有关

14. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ 的收敛域为

A. $(0,2)$

B. $(0,2]$

C. $[0,2)$

D. $[0,2]$

15. 以下四个命题中正确的是

A. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

D. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^x dx}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 若 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. $\int_{-1}^1 \frac{x+x^2}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 若 $z = e^{x^2y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 过点 $(1, -1, 0)$ 且与平面 $2x + y + 3z = 1$ 垂直的直线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(一): 本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分。

21. 已知 $y = (1+x^2)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

22. 求不定积分 $\int \cos \sqrt{x} dx$.

23. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程.

24. 求二重积分 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 1$ 及 $y = 0$ 所围成的闭区域.

25. 求二阶微分方程 $y'' = e^x + \cos x$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的特解.

四、计算题(二):本大题共 2 小题,每小题 10 分,共 20 分。

26. 设函数 $z = e^u \cos v$, 其中 $u = xy, v = x^2 + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

27. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

五、证明题:本大题 5 分。

28. 证明:当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{x}{2} > \sqrt{1+x}$.