绝密 ★ 考试结束前

2024年4月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明:在本卷中,A^{T}表示矩阵A的转置矩阵,A^*表示矩阵A的伴随矩阵,E是单位矩阵,$|A|$表示方阵A的行列式,$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 已知行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$,则$\begin{vmatrix} a_1 & a_1-3b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2-3b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3-3b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$

A. -12　　B. -6

C. 6　　D. 12

2. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为3阶可逆矩阵,则$(2\boldsymbol{AB})^{-1}=$

A. $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　B. $2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

C. $2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. $2^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,1)^{\mathrm{T}}$线性相关,则数$t=$

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

4．已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$经初等行变换化为$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{array}\right)$，

若方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解，则数$\lambda$为

A．-1　　B．0

C．1　　D．2

5．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-2,-\frac{1}{2},2$，则下列矩阵中可逆的是

A．$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$　　B．$-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$

C．$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$　　D．$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=$________.

7．设行列式$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则$D$的展开式中$x$的系数为________.

8．设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$的所有元素都是1，则$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=$________.

9．设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则$|-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$________.

10．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&5&0\end{pmatrix}$，则$r(A)=$________.

11．设向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$，$\beta=(1,2,-1)^T$，则β由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示的表达式为________.

12．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若向量组$\lambda\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也线性无关，则数$\lambda$应满足________.

13．设A是$m\times n$矩阵，若$r(A)=r$，则齐次线性方程组$Ax=0$基础解系所含向量的个数为________.

14．设3阶矩阵A的特征值为$1,\frac{1}{2},2$，则$\left|A^{-1}+A^*\right|=$________.

15．若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$的正、负惯性指数分别为1, 2，则数$a$的取值范围为________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．已知行列式$\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&0&3&4\\3&-2&2&-1\\-2&1&-1&1\end{vmatrix}$，$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式，求$A_{11}-A_{12}$.

17. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&3&1\end{pmatrix}$，求$A^{\mathrm{T}}B-3E$.

18. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&1\\2&1\\-6&1\end{pmatrix}$.（1）求$A^{-1}$；（2）解矩阵方程$AX=B$.

19. 求向量组$\alpha_1=(1,1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,3,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(2,4,-2,0)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大线性无关组线性表出.

20. 问数a为何值时, 线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\2x_1+x_2-x_3+x_4=2\\4x_1+2x_2-2x_3+2x_4=a\end{cases}$有无穷多解, 并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 已知$\xi=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&1&a\\-4&3&b\\1&0&2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

（1）试确定参数a,b的值及特征向量ξ所对应的特征值；

（2）A是否可以相似对角化？说明理由.

22. 求正交变换$x=Qy$, 将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$\mathbf{R}^3$中的一组基, 设向量

$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=-2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_3$，

证明：向量组β_1,β_2,β_3也是$\mathbf{R}^3$中的一组基.